Université Paris-Diderot Année 2013-2014
MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I

Feuille de TD 4 - Algèbre linéaire

Exercice 1. Résoudre les systèmes suivants :

$$\mathfrak{a})\ \begin{cases} x+2y-3z=-1 \\ 3x-y+2z=\ 7 \\ 8x+2y-2z=\ 9 \end{cases} \qquad \mathfrak{b})\ \begin{cases} 2x+y-2z=\ 10 \\ x+y+4z=-9 \\ 7x+5y+z=\ 14 \end{cases}$$

$$\mathfrak{c})\ \begin{cases} x-3y+7z=-4 \\ x-2y-3z=\ 6 \\ 7x+4y-z=\ 22 \end{cases}$$

Exercice 2. Résoudre en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

$$\mathfrak{a})\ \begin{cases} x-3y-2z=-1 \\ 2x+y-4z=\ 3 \\ x+4y-2z=\ 4 \\ 5x+6y-10z=\ 10 \end{cases} \qquad \mathfrak{b})\ \begin{cases} x+2y+3z-2t=\ 6 \\ 2x-y-2z-3t=\ 8 \\ 3x+2y-z+2t=\ 4 \\ 2x-3y+2z+t=-8 \end{cases}.$$

Exercice 3. Déterminer les valeurs du paramètre réel a pour lesquelles le système suivant :

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+az=2 \\ 2x+ay+2z=3 \end{cases}$$

$\mathfrak{a}$) n'ait aucune solution ;
$\mathfrak{b}$) ait une infinité de solutions ;
$\mathfrak{c}$) ait une solution unique.

Exercice 4. Pour quelles valeurs des paramètres réels a, b, c le système suivant admet au moins une solution ?

$$\begin{cases} x+2y-3z=a \\ 3x+8y-14z=b \\ 2x+4z=c \end{cases}$$

Exercice 5. Soit le système

$$(S)\ \begin{cases} x+3y+4z=0 & (L_1) \\ 3x+2y+4z=0 & (L_2) \\ x+2y+3z=0 & (L_3) \end{cases}.$$

On remplace L_1 par $L_1'=L_2-L_1$, L_2 par $L_2'=L_2-L_3$ et L_3 par $L_3'=L_1-L_3$. Le système (S) est-il équivalent au système (S') $\begin{cases} L_1' \\ L_2' \\ L_3' \end{cases}$?

Exercice 6. $\mathfrak{a}$) Considérons dans $\mathbb{R}^3$ la famille composée des vecteurs $u=(1,2,0)$ et $v=(1,1,1)$.
La famille $\{u,v\}$ est-elle libre ? La famille $\{u,v\}$ engendre-t-elle $\mathbb{R}^3$? La famille $\{u,v\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

b) Soient u, v les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par $u = (0, 3, 4)$ et $v = (1, 0, 5)$.
Forment-ils une famille libre de $\mathbb{R}^3$? Forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$? Forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

c) Soient u, v, w les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par $u = (1, 2, 1)$, $v = (3, 1, -1)$ et $w = (9, 8, 1)$.
Forment-ils une famille libre de $\mathbb{R}^3$? Forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$? Forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

d) Soient u, v, w les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ donnés par $u = (1, 1)$, $v = (-1, 1)$ et $w = (3, 3)$.
Forment-ils une famille libre de $\mathbb{R}^2$? Forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$? Forment-ils une base de $\mathbb{R}^2$?

e) Soient u, v, w les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par $u = (-1, 1, 1)$, $v = (0, 1, 1)$ et $w = (-2, 5, 5)$.
Ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants ? Ces vecteurs engendrent-ils $\mathbb{R}^3$? Ces vecteurs forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

f) Soient $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définie par $v_1 = (2, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 2)$, $v_3 = (0, -1, 1)$ et $v_4 = (2, 1, 1)$.
Cette famille est-elle libre ? Cette famille est-elle génératrice ? Cette famille est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

g) Compléter si possible la famille $\{(1, 0, -1), (0, 2, 3)\}$ en une base de $\mathbb{R}^3$.

h) La famille $\{(1, 2, 0), (0, 1, 0), (3, 0, 1)\}$ est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

i) La famille $\{(1, 2, 0), (0, 1, 2), (0, 1, 1)\}$ engendre-t-elle $\mathbb{R}^3$?

Exercice 7. Pour quelles valeurs du paramètre réel a les vecteurs :

$$v_1 = (1, -1, 0, 2) \quad v_2 = (1, 0, 1, 2) \quad v_3 = (1, 3, 5, 7) \quad v_4 = (0, 2, 3, a)$$

forment-ils une base de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^4$ on considère $a_1 = (2, -2, 3, 1)$ et $a_2 = (-1, 4, -6, -2)$.

a) Trouver des vecteurs a_3 et a_4 tels que $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ soit une base de $\mathbb{R}^4$.

b) Déterminer un système d'équations pour le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par a_1 et a_2.

Exercice 9. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les vecteurs $v = (1, 2)$ et $w = (-2, m)$, où $m \in \mathbb{R}$.

a) À quelle condition sur le paramètre m le vecteur w est-il multiple du vecteur v ?

b) En supposant que w *n'est pas* multiple de v, montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est une combinaison linéaire de v et w.

Exercice 10. Dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants ?
Forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?

a) $u = (3, 2, 1)$ et $v = (4, 2, 0)$;

b) $u = (3, 1, 2)$, $v = (5, 1, 0)$ et $w = (1, 1, 4)$;

c) $u = (-2, 4, 1)$, $v = (1, -2, 0)$ et $w = (3, m, -1)$ (discuter suivant les valeurs de m).

Exercice 11. Montrer que dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (2, 3, 1)$ et $v_2 = (1, -1, 2)$ engendrent le même sous-espace vectoriel que $w_1 = (3, 7, 0)$ et $w_2 = (5, 0, 7)$.